Language: **Russian**

Day: **1**

Суббота, 11 апреля 2026 года

Задача 1. Клетчатая доска 2026×2026 называется бордосской, если по крайней мере одна из её 2026^2 клеток покрашена в красный цвет. Клетчатый прямоугольник назовём нечётным прямоугольником, если он содержит нечётное число красных клеток. Определите наибольшее натуральное число M такое, что любая бордосская доска 2026×2026 содержит нечётный прямоугольник, в котором минимум M клеток.

Замечание: Клетчатый прямоугольник – это прямоугольник, состоящий из клеток доски. Эти прямоугольники содержат все свои внутренние клетки.

Задача 2. Дано натуральное число n. Мэри играет в игру. Первоначально на школьной доске записано число 1. За один ход Мэри может выбрать натуральное число j такое, что $1 \leq j \leq n$, и заменить число V, записанное на школьной доске, на число $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$. Мэри может сделать столько ходов, сколько она захочет. Здесь $R(x)$ обозначает целое число, ближайшее к x; если x является средним арифметическим двух последовательных целых, то оно округляется до большего из этих чисел. Например, $R(1.3) = 1$ и $R(1.5) = R(1.8) = 2$.

a) Докажите, что для каждого заданного значения n существует такое натуральное B, что Мэри никогда не сможет получить на доске число, большее B.

b) Для любого заданного n обозначим через $f(n)$ наибольшее число, которое Мэри может записать на доске за конечное число ходов. Докажите, что существует натуральное число N такое, что для любого $n \geq N$ число $f(n)$ делится на 2026.

Задача 3. Обозначим через $\mathbb{R}$ множество всех действительных чисел. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что для любых действительных чисел x, y справедливо равенство

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y).$$

Время: 4 часа 30 минут

Каждая задача оценивается в 7 баллов