Sâmbătă, 11 aprilie 2026

Problema 1. O tablă 2026×2026 se numește *bordeaux* dacă cel puțin una dintre cele 2026^2 celule unitate ale sale este colorată cu roșu. O regiune dreptunghiulară formată din celule unitate se numeşte *bună* dacă ea conţine un număr impar de celule unitate roşii. Aflaţi cel mai mare număr natural M astfel încât orice tablă bordeaux 2026×2026 conţine o regiune bună formată din cel puţin M celule.

Notă: O regiune dreptunghiulară are laturile paralele cu cele ale tablei şi îşi conţine tot interiorul.

Problema 2. Fiind dat un număr natural nenul n, Marie joacă următorul joc: iniţial, pe tablă este scris numărul 1. Apoi, de câte ori vrea, Marie poate să aleagă un număr natural j astfel încât $1 \leq j \leq n$ şi să înlocuiască numărul V de pe tablă cu numărul $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$. S-a notat cu $R(x)$ numărul întreg cel mai apropiat de x; dacă x se află la distanţe egale faţă de două numere întregi consecutive, se rotunjeşte în sus. De exemplu, $R(1{,}3) = 1$ şi $R(1{,}5) = R(1{,}8) = 2$.

a) Arătaţi că, pentru orice n dat, există un număr natural B astfel încât Marie nu poate obţine niciodată pe tablă un număr mai mare decât B.

b) Pentru fiecare n dat, fie $f(n)$ cel mai mare număr pe care Marie îl poate obţine pe tablă după un număr finit de înlocuiri. Arătaţi că există un număr natural N astfel încât, pentru orice $n \geq N$, avem că 2026 divide $f(n)$.

Problema 3. Fie $\mathbb{R}$ mulţimea numerelor reale. Aflaţi toate funcţiile $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice numere reale x, y are loc relaţia

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y).$$

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă valorează 7 puncte