



Language: Portuguese

Day: 1

Sábado, 11 de Abril de 2026

Problema 1. Um tabuleiro 2026×2026 é dito *bordeaux* se pelo menos uma das suas 2026^2 casas estiver colorida de vermelho. Uma região retangular composta por casas é dita *ímparmente retangular* se contiver uma quantidade ímpar de casas coloridas de vermelho. Determine o maior inteiro positivo M tal que, em todo tabuleiro bordeaux 2026×2026 , exista uma região ímparmente retangular com pelo menos M casas.

Observação: Uma região retangular contém todo o seu interior e possui lados paralelos aos lados do tabuleiro.

Problema 2. Dado um inteiro positivo n , Maria começa a jogar com o número 1 escrito em um quadro. Quantas vezes quiser, ela pode fazer o seguinte: escolher um inteiro j , tal que $1 \leq j \leq n$, e substituir o número V no quadro pelo número $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$. Aqui, $R(x)$ denota o inteiro mais próximo de x ; se x estiver a mesma distância dois inteiros consecutivos, o valor é arredondado para cima. Por exemplo, $R(1,3) = 1$ e $R(1,5) = R(1,8) = 2$.

- Mostre que, para cada n dado, existe um inteiro positivo B tal que Maria nunca consegue escrever um número maior que B no quadro.
- Para cada n , seja $f(n)$ o maior número que se pode escrever no quadro após uma quantidade finita de substituições. Mostre que existe um inteiro positivo N tal que para todo $n \geq N$ temos que 2026 divide $f(n)$.

Problema 3. Seja \mathbb{R} o conjunto dos números reais. Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que para todos números reais x, y temos:

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y).$$