



Language: Polish

Day: 1

Sobota, 11 kwietnia, 2026

Zadanie 1. Szachownicę o wymiarach 2026×2026 nazywamy *francuską* jeśli przynajmniej jedno z jej 2026^2 pól jest pokolorowane na czerwono. Prostokątny obszar złożony z pól nazywamy *nieparzystym*, jeśli zawiera nieparzystą liczbę czerwonych pól. Znajdź największą liczbę naturalną M , taką że na każdej francuskiej szachownicy 2026×2026 możemy znaleźć *nieparzysty* obszar zawierający przynajmniej M pól.

Uwaga: Każdy prostokątny obszar ma boki równoległe do boków szachownicy i zawiera całe swoje wnętrze.

Zadanie 2. Do zagrania w grę dano Julii dodatnią liczbę całkowitą n . Gra zaczyna się z liczbą 1 napisaną na tablicy. Potem, tyle razy ile zechce, Julia może wybrać liczbę całkowitą $1 \leq j \leq n$ i zastąpić liczbę V , znajdującą się aktualnie na tablicy, liczbą $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$. Tutaj $R(x)$ oznacza zaokrąglenie liczby rzeczywistej x do najbliższej liczby całkowitej; jeśli x jest w połowie między dwiema kolejnymi liczbami całkowitymi, zaokrąglana jest do góry. Na przykład $R(1,3) = 1$ oraz $R(1,5) = R(1,8) = 2$.

- Udowodnij, że dla każdego n istnieje liczba całkowita dodatnia B , taka że Julia nigdy nie będzie mogła napisać liczby większej niż B na tablicy.
- Dla danego n , niech $f(n)$ będzie największą liczbą którą Julia może napisać na tablicy po skończeniu wielu zamianach. Udowodnij, że istnieje liczba całkowita dodatnia N , taka że dla każdego $n \geq N$ naturalnego, 2026 dzieli $f(n)$.

Zadanie 3. Niech \mathbb{R} oznacza zbiór liczb rzeczywistych. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, takie że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi

$$f\left((f(x) + f(y))^2\right) = (x + y)f(x + y).$$