Language: **Norwegian**

Day: **1**

Lørdag 11. April 2026

Oppgave 1. Et 2026×2026 brett kalles *bordeaux* hvis minst en av de 2026^2 rutene er farget rød. Et rektangulært område av ruter kalles *oddelig rektangulært* hvis det inneholder et odde antall røde ruter. Bestem det største positive heltallet M slik at for ethvert mulig 2026×2026 bordeaux brett, finnes det et oddelig rektangulært område som inneholder minst M ruter.

Merk: Et rektangulært område har sider som er parallelle med sidene til brettet, og inneholder hele det indre området.

Oppgave 2. Gitt et positivt heltall n, spiller Nils et spill der han begynner med tallet 1 på en tavle. Han kan, så mange ganger han vil, velge et heltall j slik at $1 \leq j \leq n$, og erstatte tallet V på tavla med tallet $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$. Her betegner $R(x)$ det nærmeste heltallet til x; hvis x er nøyaktig halvveis mellom to etterfølgende heltall, rundes det opp. For eksempel er $R(1.3) = 1$ og $R(1.5) = R(1.8) = 2$.

a) Vis at for ethvert heltall n, finnes det et positivt heltall B slik at Nils aldri kan ende opp med et tall som er større enn B skrevet på tavla.

b) For ethvert heltall n, la $f(n)$ være det største tallet Nils kan oppnå etter endelig mange erstatninger. Vis at det finnes et positivt heltall N slik at 2026 deler $f(n)$ for alle $n \geq N$.

Oppgave 3. La $\mathbb{R}$ være mengden av alle reelle tall. Finn alle funksjoner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som er slik at

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y)$$

for alle reelle tall x og y.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng