Language: **Macedonian**

Day: **1**

Сабота, 11 Април, 2026

Задача 1. 2026×2026 табла од квадратчиња велиме дека е *бордо* ако барем едно квадратче е обоено во црвено. Правоаголен регион од квадратчиња е *непарен-правоаголник* ако се состои од непарен број црвени квадратчиња. Определи го најголемиот природен број M таков што за било која *бордо* 2026×2026 табла, постои *непарен-правоаголник* кој се состои од барем M квадратчиња.

Забелешка: Правоаголен регион има страни паралелни на таблата и ја содржи сета своја внатрешност.

Задача 2. Нека n е природен број, Марија игра игра кадешто почнува со бројот 1 на таблата. Ако бројот V е напишан на таблата, таа може да избере природен број j таков што $1 \leq j \leq n$ и го брише бројот V и на негово место го запишува бројот $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$, играта завршува кога Марија сака. Со $R(x)$ го означуваме најблискиот цел број до x, така што ако x е точно на средина помеѓу два цели броја го земаме поголемиот. Пример: $R(1.3) = 1$ and $R(1.5) = R(1.8) = 2$.

а) Докажи дека за било кој n, постои природен број B таков што Марија не може да ја заврши играта со број поголем од B на таблата.

б) За секој n, нека $f(n)$ биде максималниот број кој може да се добие после конечно многу бришења. Покажи дека постои природен број N таков што за секој природен број $m \geq N$, 2026 го дели $f(m)$.

Задача 3. Нека $\mathbb{R}$ е множеството на реални броеви. Одреди ги сите функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такви што за сите реални броеви x и y, следново е точно:

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y).$$