



Language: **Lithuanian**

Day: **1**

2026 m. balandžio 11 d., šeštadienis

1 uždavinys. Lenta, kurios dydis yra 2026×2026 vadinama *bordiška*, jei bent vienas iš jos 2026^2 vienetinių langelių yra nuspalvintas raudonai. Stačiakampis regionas, sudarytas iš lentos langelių, vadinamas *nelygiškai-stačiakampiu*, jei jo viduje yra nelyginis skaičius raudonų langelių. Raskite tokį didžiausią teigiamą sveiką skaičių M , kad, bet kokioje 2026×2026 bordiškoje lentoje, egzistuoja nelygiškai-stačiakampis regionas, kurį sudaro bent M langelių.

Pastaba: Stačiakampio regiono kraštinės lygiagrečios lentos kraštinėms ir jam priklauso visi langeliai, esantys jo viduje.

2 uždavinys. Duotas teigiamas sveikasis skaičius n . Marija žaidžia žaidimą, kurio pradžioje ant lentos užrašytas skaičius 1. Ji gali atlikti ėjimus kiek nori kartų. Vieno ėjimo metu, ji pasirenka tokį sveikąjį skaičių j , kad $1 \leq j \leq n$ ir pakeičia ant lentos parašytą skaičių V į skaičių $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$. Čia $R(x)$ žymi artimiausią x sveikąjį skaičių, o jei x yra vienodai nutolęs nuo dviejų sveikųjų skaičių, apvalinama į didesniąją pusę. Pavyzdžiui, $R(1.3) = 1$ ir $R(1.5) = R(1.8) = 2$.

- Įrodykite, kad, bet kokiam duotam n , egzistuoja toks teigiamas sveikasis skaičius B , kad Marija niekada negali gauti skaičiaus, didesnio nei B , parašyto ant lentos.
- Bet kokiam duotam n , tegu $f(n)$ žymi didžiausią skaičių, kurį galima parašyti ant lentos po baigtinio skaičiaus ėjimų. Įrodykite, kad egzistuoja toks teigiamas sveikasis skaičius N , kad visiems $n \geq N$, skaičius 2026 dalo $f(n)$.

3 uždavinys. Tegų \mathbb{R} žymi visų realiųjų skaičių aibę. Raskite visas tokias funkcijas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kad visiems realiesiems skaičiams x, y teisinga ši lygybė:

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y).$$