Sabato, 11 aprile 2026

Problema 1. Una griglia 2026×2026 è detta *bordeaux* se almeno una delle sue 2026^2 celle unitarie è colorata di rosso. Una regione rettangolare della griglia è detta *disparatamente rettangolare* se contiene un numero dispari di celle rosse. Determinare il più grande intero positivo M tale che, in ogni possibile griglia bordeaux 2026×2026, esiste una regione disparatamente rettangolare di almeno M celle.

Nota: Una regione rettangolare ha lati paralleli ai lati della griglia e contiene tutte le celle al suo interno.

Problema 2. Dato un intero positivo n, Francesca gioca al seguente gioco, iniziando con il numero 1 scritto su una lavagna. Dopodiché, per quante volte desidera, può scegliere un intero j tale che $1 \leq j \leq n$, e sostituire il numero V scritto sulla lavagna in quel momento, con il numero $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$. Qui $R(x)$ denota il numero intero più vicino ad x; se x si trova esattamente a metà tra due interi consecutivi, si arrotonda all'intero superiore. Ad esempio, $R(1.3) = 1$ e $R(1.5) = R(1.8) = 2$.

a) Dimostrare che per qualunque n fissato esiste un intero positivo B tale per cui Francesca non può mai ritrovarsi con un numero maggiore di B sulla lavagna.

b) Fissato n, sia $f(n)$ il massimo numero che si può scrivere sulla lavagna dopo un numero finito di mosse. Dimostrare che esiste un intero positivo N tale che per ogni $n \geq N$, si verifica che 2026 divide $f(n)$.

Problema 3. Sia $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali. Determinare tutte le funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che, per tutti i numeri reali x ed y, vale la seguente identità:

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y).$$