Language: **Indonesian**

Day: **1**

Sabtu, 11 April 2026

Soal 1. Sebuah papan berukuran 2026×2026 disebut *bordeaux* jika sedikitnya satu diantara 2026^2 sel satuannya berwarna merah. Sebuah daerah persegi panjang dikatakan *oddly-rectangular* jika didalamnya terdapat ganjil buah sel berwarna merah. Tentukan bilangan bulat positif terbesar M sehingga untuk setiap papan bordeaux berukuran 2026×2026, terdapat daerah oddly-rectangular yang terdiri dari sedikitnya M buah sel.

Catatan: Sebuah daerah persegi panjang, mempunyai sisi-sisi yang sejajar dengan sisi-sisi papan dan mengandung semua daerah interiornya.

Soal 2. Diberikan sebuah bilangan bulat positif n, Marie bermain suatu game yang diawali dengan angka 1 pada papan tulis. Sebanyak yang ia mau, Marie dapat memilih sebuah bilangan bulat j sehingga $1 \leq j \leq n$ dan mengganti bilangan V di papan tulis dengan bilangan $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$. Di sini, $R(x)$ menyatakan bilangan bulat terdekat ke x; jika x terletak persis di antara dua bilangan bulat, ia dibulatkan ke atas. Sebagai contoh, $R(1,3) = 1$ dan $R(1,5) = R(1,8) = 2$.

a) Buktikan bahwa untuk setiap n yang diberikan, terdapat bilangan bulat positif B sehingga Marie tidak pernah mendapat bilangan yang lebih besar dari B di papan tulis.

b) Untuk setiap n yang diberikan, misalkan $f(n)$ adalah bilangan terbesar yang dapat dihasilkan di papan tulis setelah sejumlah hingga langkah. Buktikan bahwa terdapat bilangan bulat positif N sehingga untuk setiap $n \geq N$, berlaku 2026 habis membagi $f(n)$.

Soal 3. Misalkan $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real. Tentukan semua fungsi $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap bilangan real x, y berlaku:

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y).$$