Language: **Icelandic**

Day: **1**

Laugardagurinn 11. apríl, 2026

Dæmi 1. Tafla af 2026×2026 reitum er sögð vera *vínrauð* ef að minnsta kosti einn af 2026^2 reitum hennar er litaður rauður. Rétthyrnt svæði af reitum er sagt vera *odda-rétthyrningur* ef fjöldi rauðra reita sem svæðið inniheldur er oddatala. Ákvarðið stærstu jákvæðu heiltölu M þannig að á sérhverri vínrauðri 2026×2026 töflu sé til odda-rétthyrningur með að minnsta kosti M reitum.

Athugasemd: Rétthyrnt svæði hefur hliðar sem eru samsíða hliðum töflunnar og inniheldur allt sem er innan í því.

Dæmi 2. Látum n vera jákvæða heiltölu. María spilar leik þar sem hún byrjar á að skrifa töluna 1 á tússtöflu. Eins oft og hún vill getur hún valið heiltölu j þannig að $1 \leq j \leq n$ og skipt tölunni V á töflunni út fyrir töluna $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$. Hér táknar $R(x)$ næstu heiltölu við x; ef talan x er nákvæmlega mitt á milli tveggja samliggjandi heiltalna er hún námunduð upp. Til dæmis er $R(1{,}3) = 1$ og $R(1{,}5) = R(1{,}8) = 2$.

a) Sýnið að fyrir sérhvert n sé til jákvæð heiltala B þannig að María geti aldrei endað með tölu sem er stærri en B á töflunni.

b) Fyrir sérhvert gefið n, látum $f(n)$ vera stærstu töluna sem er fáanleg á töfluna eftir endanlega mörg skref. Sýnið að til sé jákvæð heiltala N þannig að fyrir öll $n \geq N$ muni $f(n)$ vera deilanleg með 2026.

Dæmi 3. Látum $\mathbb{R}$ vera mengi rauntalna. Ákvarðið öll föll $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ þannig að fyrir allar rauntölur x og y gildi eftirfarandi:

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y).$$