



Language: Hungarian

Day: 1

2026. április 11. szombat

Feladat 1. Egy 2026×2026 -os négyzetrácsot *bordónak* nevezünk, ha a 2026^2 darab egységcellája közül legalább egy pirosra van színezve. Egy cellákból álló téglalap alakú régiót *páratlanosnak* hívunk, ha páratlan sok piros cellát tartalmaz. Határozd meg azt a legnagyobb pozitív egész M számot, amelyre bármely 2026×2026 -os bordó négyzetrács esetén létezik egy legalább M cellából álló páratlanos régió.

Megjegyzés: Egy téglalap alakú régió oldalai párhuzamosak a négyzetrács oldalaival és tartalmazza a belsejét.

Feladat 2. Adott egy pozitív egész n . Mária a következő játékot játssza a táblán: kezdetben felírja az 1-et, majd minden lépésben választ egy $1 \leq j \leq n$ egész számot és a táblán szereplő V számot lecseréli a $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$ számra, ahol $R(x)$ az x -hez legközelebbi egész számot jelöli. Ha az x éppen félúton van két szomszédos egész szám között, akkor felfelé kerekít. Például $R(1, 3) = 1$ és $R(1, 5) = R(1, 8) = 2$.

- Bizonyítsd be, hogy minden adott n -re létezik olyan B pozitív egész szám, amelynél nagyobb számot Mária sohasem írhat fel a táblára.
- Egy n egész számra jelölje $f(n)$ a legnagyobb számot, amelyet Mária a táblára véges sok lépés után felírhat. Bizonyítsd be, hogy létezik N pozitív egész, amelyre minden $n \geq N$ esetén $f(n)$ osztható 2026-tal.

Feladat 3. Jelölje \mathbb{R} a valós számok halmazát. Határozd meg az összes $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amelyre tetszőleges x, y valós számokra teljesül, hogy

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y).$$