



יום שבת, 11 באפריל, 2026

**שאלה 1.** נאמר שלוח משבצות של  $2026 \times 2026$  הוא **בורדו** אם לפחות אחת מבין  $2026^2$  המשבצות שלו צבועה באדום. נקרא לאזור מלבני של משבצות **מלבני-אי-זוגי** אם הוא מכיל מספר אי-זוגי של משבצות אדומות. מצאי את השלם החיובי הגדול ביותר  $M$  כך שבכל לוח בורדו  $2026 \times 2026$  קיים אזור מלבני-אי-זוגי של לפחות  $M$  משבצות.

(הערה: אזור מלבני הוא תחום משבצות עם צלעות שמקבילות לצלעות הלוח, והוא כולל את כל המשבצות שבתוכו.)

**שאלה 2.** בהינתן מספר חיובי  $n$ , איילה משחקת משחק. בתחילת המשחק המספר 1 כתוב על הלוח. לאחר מכן, מספר פעמים כרצונה, היא בוחרת מספר שלם  $j$  המקיים  $1 \leq j \leq n$  ומחליפה את המספר  $V$  שכתוב על הלוח במספר  $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$ . כאן  $R(x)$  הוא השלם הקרוב ביותר ל- $x$ , ואם  $x$  הוא בדיוק באמצע בין שני שלמים עוקבים, הוא מעוגל מעלה. לדוגמה:  $R(1.3) = 1$ ,  $R(1.5) = R(1.8) = 2$ .

א. הוכיחי שלכל  $n$  נתון, קיים שלם חיובי  $B$  כך שהמספר על הלוח לעולם לא יוכל להיות גדול מ- $B$ .  
ב. לכל  $n$  נתון, יהי  $f(n)$  המספר הגדול ביותר שיכול להיות על הלוח אחרי מספר סופי של החלפות. הראי שקיים שלם חיובי  $N$  כך שלכל  $n \geq N$  מתקיים ש- $f(n)$  מתחלק ב-2026.

**שאלה 3.** תהי  $\mathbb{R}$  קבוצת המספרים הממשיים. מצאי את כל הפונקציות  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  עבורן לכל  $x, y$  ממשיים, מתקיים:

$$f\left((f(x) + f(y))^2\right) = (x + y)f(x + y)$$