Σάββατο, 11 Απριλίου 2026

Πρόβλημα 1. Ένας 2026×2026 πίνακας ονομάζεται *μπορντώ*, αν τουλάχιστον ένα από τα 2026^2 μοναδιαία κελιά του είναι χρωματισμένο κόκκινο. Μια ορθογώνια περιοχή κελιών λέγεται *περιττο-ορθογώνια* αν περιέχει περιττό αριθμό κόκκινων κελιών. Να προσδιορίσετε τον μεγαλύτερο θετικό ακέραιο M τέτοιον, ώστε σε κάθε 2026×2026 μπορντώ πίνακα, να υπάρχει τουλάχιστον μια περιττο-ορθογώνια περιοχή με τουλάχιστον M κελιά.

Σημείωση: Μια ορθογώνια περιοχή έχει πλευρές παράλληλες στις πλευρές του πίνακα και περιέχει ολόκληρο το εσωτερικό του.

Πρόβλημα 2. Για δοθέντα θετικό ακέραιο n, η Μαρία παίζει ένα παιχνίδι στο οποίο ξεκινά με τον αριθμό 1 σε ένα μαυροπίνακα. Όσες φορές επιθυμεί, μπορεί να επιλέξει έναν ακέραιο j με $1 \leq j \leq n$ και να αντικαταστήσει τον αριθμό V στον μαυροπίνακα με τον αριθμό $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$. Εδώ, ο $R(x)$ συμβολίζει τον πλησιέστερο ακέραιο στο x. Αν ο x βρίσκεται ακριβώς στη μέση από δύο διαδοχικούς ακέραιους, στρογγυλοποιείται προς τα πάνω. Για παράδειγμα, $R(1,3) = 1$ και $R(1,5) = R(1,8) = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε δοθέν n, υπάρχει θετικός ακέραιος B τέτοιος, ώστε η Μαρία να μην μπορεί ποτέ να καταλήξει με έναν αριθμό μεγαλύτερο του B στον μαυροπίνακα.

β) Για κάθε δοθέν n, έστω $f(n)$ ο μεγαλύτερος αριθμός που να μπορεί να γραφτεί στον μαυροπίνακα μετά από πεπερασμένες το πλήθος αντικαταστάσεις. Να αποδείξετε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος N τέτοιος, ώστε για κάθε $n \geq N$, το 2026 να διαιρεί τον $f(n)$.

Πρόβλημα 3. Έστω $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x, y να ισχύει το εξής:

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y).$$