Samstag, 11. April 2026

Problem 1. Ein 2026×2026 Brett heisse *bordeaux*, falls mindestens eines seiner 2026^2 Felder rot ist. Eine rechteckige Fläche von Feldern heisse *toll*, falls sie eine ungerade Anzahl roter Felder enthält. Bestimme die grösste positive ganze Zahl M, sodass in jedem möglichen 2026×2026 bordeaux Brett eine tolle rechteckige Fläche mit mindestens M Feldern existiert.

Bemerkung: Die Seiten einer rechteckigen Fläche sind parallel zu den Seiten des Bretts.

Problem 2. Sei n eine positive ganze Zahl. Marie spielt ein Spiel, in dem sie mit der Zahl 1 an der Tafel beginnt. Sie kann beliebig oft eine ganze Zahl j mit $1 \leq j \leq n$ auswählen und die Zahl V an der Tafel durch die Zahl $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$ ersetzen. Dabei bezeichne $R(x)$ die am nächsten an x gelegene ganze Zahl; wobei aufgerundet wird, falls x genau in der Mitte zwischen zwei ganzen Zahlen liegt. Zum Beispiel gilt $R(1{,}3) = 1$ und $R(1{,}5) = R(1{,}8) = 2$.

a) Zeige, dass es für jedes n eine positive ganze Zahl B gibt, sodass Marie nie eine Zahl grösser als B an die Tafel schreiben kann.

b) Für ein gegebenes n sei $f(n)$ die grösste Zahl, die durch endlich viele Ersetzungen erreicht werden kann. Zeige, dass es eine positive ganze Zahl N gibt, sodass für alle $n \geq N$ gilt, dass 2026 die Zahl $f(n)$ teilt.

Problem 3. Sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle reellen Zahlen x, y gilt, dass

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y).$$

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert