Language: **Georgian**

Day: **1**

შაბათი, 11 აპრილი, 2026

ამოცანა 1. 2026×2026 დაფას ეწოდება *ბორდოსფერი,* თუ მისი 2026^2 ცალი უჯრიდან ერთი მაინც არის გაფერადებული წითლად. დაფის უჯრებისგან შედგენილ მართკუთხა არეს ეწოდება *კენტი,* თუ ის შეიცავს კენტი რაოდენობის წითელ უჯრებს. იპოვეთ ისეთი უდიდესი დადებითი მთელი რიცხვი M, რომ ყველა შესაძლო 2026×2026 ბორდოსფერ დაფაზე არსებობდეს კენტი მართკუთხა არე, რომელიც მოიცავს მინიმუმ M ცალ უჯრას.

შენიშვნა: მართკუთხა არე მოიცავს ყველა მის შიდა უჯრას და მისი გვერდები დაფის გვერდების პარალელურია.

ამოცანა 2. მოცემულია დადებითი მთელი რიცხვი n. მარიამი თამაშობს თამაშს, რომელშიც თავდაპირველად დაფაზე წერია რიცხვი 1. მას (რამდენჯერაც უნდა, იმდენჯერ) შეუძლია, აირჩიოს მთელი რიცხვი j $(1 \leq j \leq n)$ და დაფაზე დაწერილი რიცხვი V ჩაანაცვლოს რიცხვით $j \cdot R(\frac{V}{j})$. აქ $R(x)$-ით აღნიშნულია x-ის უახლოესი მთელი რიცხვი. თუ x თანაბრად არის დაშორებული ორი მომდევნო მთელი რიცხვისგან, მაშინ ის მრგვალდება მაღლა. მაგალითად, $R(1.3) = 1$ და $R(1.5) = R(1.8) = 2$.

ა) აჩვენეთ, რომ ყოველი მოცემული n-თვის არსებობს ისეთი დადებითი მთელი რიცხვი B, რომლისთვისაც სრულდება შემდეგი: მარიამი ვერასოდეს შეძლებს დაფაზე B-ზე მეტი რიცხვის დაწერას.

ბ) ნებისმიერი მოცემული n-თვის, $f(n)$ იყოს უდიდესი ისეთ რიცხვებს შორის, რომელთა დაფაზე დაწერაც შესაძლებელია სასრული რაოდენობა სვლების შემდეგ. აჩვენეთ, რომ არსებობს ისეთი დადებითი მთელი რიცხვი N, რომ ნებისმიერი $n \geq N$-თვის 2026 ყოფს $f(n)$-ს.

ამოცანა 3. $\mathbb{R}$-ით აღვნიშნოთ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. განსაზღვრეთ ყველა $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ფუნქცია, რომელიც ნებისმიერი ნამდვილი x და y რიცხვებისთვის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$$f\left(\left(f(x) + f(y)\right)^2\right) = (x + y)f(x + y).$$

Language: Georgian

დრო: 4 საათი და 30წუთი

თითოეული ამოცანა ფასდება 7 ქულით