



Language: **French**

Day: **1**

Samedi 11 avril 2026

Problème 1. Un tableau 2026×2026 est dit *bordeaux* si au moins une de ses 2026^2 cases est coloriée en rouge. Une région rectangulaire formée de cases entières est dite *impairement rouge* si elle contient un nombre impair de cases rouges. Déterminer le plus grand entier strictement positif M tel que, dans chacun des tableaux bordeaux 2026×2026 possibles, il existe une région rectangulaire impairement rouge d'au moins M cases.

Note : Une région rectangulaire a des côtés parallèles aux côtés du tableau et contient toutes ses cases intérieures.

Problème 2. Soit n un entier strictement positif. Marie joue à un jeu : elle commence avec le nombre 1 écrit au tableau. Elle peut, autant de fois qu'elle le souhaite, choisir un entier j tel que $1 \leq j \leq n$ et remplacer alors le nombre V au tableau par le nombre $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$. Ici, $R(x)$ désigne l'entier le plus proche de x ; si x est exactement à mi-chemin entre deux entiers consécutifs, il est arrondi vers le haut. Par exemple, $R(1,3) = 1$ et $R(1,5) = R(1,8) = 2$.

- Prouver que pour chaque n , il existe un entier strictement positif B tel que Marie ne peut jamais obtenir un nombre plus grand que B au tableau.
- Pour tout n donné, soit $f(n)$ le nombre maximum que l'on peut obtenir au tableau après un nombre fini de remplacements. Montrer qu'il existe un entier strictement positif N tel que pour tout $n \geq N$, le nombre 2026 divise $f(n)$.

Problème 3. Soit \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels. Déterminer toutes les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous les nombres réels x et y , on a :

$$f\left((f(x) + f(y))^2\right) = (x + y)f(x + y).$$