Lauantai, 11.4.2026

Tehtävä 1. Lauta, jonka koko on 2026×2026, on *bordeaux*, jos vähintään yksi sen 2026^2 yksikköruudusta on väritetty punaiseksi. Suorakulmainen ruutualue on *oudon-suorakulmainen*, jos se sisältää parittoman määrän punaisia ruutuja. Määritä suurin positiivinen kokonaisluku M, jolla kaikilla mahdollisilla 2026×2026 bordeaux-laudoilla, on olemassa oudon-suorakulmainen vähintään M ruutua sisältävä alue.

Huomaa: Suorakulmaisen alueen sivut ovat yhdensuuntaiset laudan sivujen kanssa, ja suorakulmainen alue sisältää kaikki sen sisällä olevat ruudut.

Tehtävä 2. Annetaan positiviinen kokonaisluku n. Muumipappa pelaa liitutaululla peliä, jossa hän aloittaa luvulla 1. Niin monta kertaa kuin hän haluaa, hän voi valita kokonaisluvun j, $1 \leq j \leq n$, ja vaihtaa liitutaulun luvun V lukuun $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$. Tässä $R(x)$ merkitsee lukua x lähintä kokonaislukua; jos x on täsmälleen kahden kokonaisluvun puolivälissä, se pyöristetään ylöspäin. Esimerkiksi $R(1.3) = 1$ ja $R(1.5) = R(1.8) = 2$.

a) Osoita, että jokaiselle n on olemassa positiivinen kokonaisluku B, jolla Muumipappa ei voi päätyä liitutaudulla lukua B suurempaan lukuun.

b) Kaikille n, olkoon $f(n)$ suurin liitutaululla saavutettava luku äärellisen määrän luvunvaihdoksia jälkeen. Osoita, että on olemassa positiivinen kokonaisluku N, jolla kaikille $n \geq N$ luku 2026 jakaa $f(n)$.

Tehtävä 3. Olkoot $\mathbb{R}$ reaalilukujen joukko. Määritä kaikki funktiot $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joilla kaikilla reaaliluvuilla x, y pätee yhtälö:

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y).$$

Aika: 4 tuntia ja 30 minuuttia
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen