



Language: Estonian

Day: 1

Laupäev, 11. Aprill 2026

Ülesanne 1. 2026×2026 ruudustik on *bordeaux*, kui vähemalt üks temas 2026^2 ruutudest on värvitud punaseks. Ristkülikukujulist alamruudustikku nimetatakse *paarituks ristkülikuks*, kui ta sisaldab paaritu arvu punaseid ruute. Leida suurim selline positiivne täisarv M , et igas 2026×2026 bordeaux ruudustikus leidub vähemalt M ruudust koosnev paaritu ristkülik.

Märkus: Ristkülikukujuline alamruudustiku küljed on paralleelsed kogu ruudustiku külgedega ning ta sisaldab kõiki ruute oma sisepiirkonnas.

Ülesanne 2. Olgu n positiivne täisarv. Marie mängib mängu, kus algul on tahvil arv 1. Igal käigul võib ta valida täisarvu j , kus $1 \leq j \leq n$ ning asendada tahvil oleva arvu V arvuga $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$. Siin $R(x)$ on arvule x lähim täisarv; kui x on täpselt kahe järjestikuse täisarvu keskmine, siis valitakse neist suurem. Näiteks $R(1,3) = 1$ and $R(1,5) = R(1,8) = 2$.

- Näidata, et iga n korral leidub selline positiivne täisarv B , et Marie ei saa kunagi tahvile kirjutada arvu, mis on suurem kui B .
- Iga n korral olgu $f(n)$ maksimaalne arv, mis on võimalik tahvile kirjutada pärast lõplikku arvu samme. Näidata, et leidub positiivne täisarv N nii, et iga $n \geq N$ korral 2026 jagab arvu $f(n)$.

Ülesanne 3. Olgu \mathbb{R} reaalarvude hulk. Leida kõik funktsioonid $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mis rahuldavad kõigi reaalarvude x, y korral tingimust

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y).$$