Language: **Dutch**

Day: **1**

Zaterdag 11 april 2026

Opgave 1. We noemen een 2026×2026-bord *bordeaux* als minstens één van de 2026^2 vakjes rood is. Een rechthoekige regio van vakjes noemen we *merkwaardig* als het een oneven aantal rode vakjes bevat. Bepaal het grootste positieve gehele getal M zo dat elk mogelijk bordeaux 2026×2026-bord een merkwaardige rechthoekige regio van minstens M vakjes bevat.

Opmerking: een rechthoekige regio heeft zijden die parallel zijn aan de zijden van het bord en bevat alle vakjes in het inwendige.

Opgave 2. Voor een gegeven een positief geheel getal n speelt Marieke een spelletje waarbij ze begint met het getal 1 op een schoolbord. Zo vaak als ze wilt mag ze een geheel getal j kiezen zo dat $1 \leq j \leq n$ en het getal V op het schoolbord vervangen door het getal $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$. Hier staat $R(x)$ voor het gehele getal het dichtsbij x; als x precies in het midden tussen twee opvolgende gehele getallen ligt, dan wordt het omhoog afgerond. Bijvoorbeeld, $R(1{,}3) = 1$ en $R(1{,}5) = R(1{,}8) = 2$.

a) Bewijs dat er voor elk willekeurig gegeven n een positief geheel getal B bestaat zo dat Marieke nooit een getal groter dan B op het schoolbord kan krijgen.

b) Voor elke n zij $f(n)$ het maximum van de getallen die op het schoolbord verkregen kunnen worden in een eindig aantal vervangingen. Bewijs dat er een positief geheel getal N bestaat zo dat voor alle $n \geq N$ geldt dat 2026 een deler van $f(n)$ is.

Opgave 3. Zij $\mathbb{R}$ de verzameling van reële getallen. Bepaal alle functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zo dat voor alle reële getallen x, y geldt dat

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y).$$

Tijdsduur: 4 uur en 30 minuten
Elke opgave is 7 punten waard.