



Language: Danish

Day: 1

Lørdag d. 11. april 2026

Opgave 1. Et 2026×2026 bræt siges at være *bordeaux* hvis mindst ét af dets 2026^2 felter er farvet rødt. Et rektangulært område bestående af felter er *morsomt* hvis det indeholder et ulige antal af røde felter. Bestem det største positive heltal M sådan at der for ethvert 2026×2026 bordeaux bræt, findes et morsomt rektangulært område bestående af mindst M felter.

Bemærk: Siderne til et rektangulært område er parallelle med brættets sider. Området indeholder hele sit indre.

Opgave 2. Lad n være et positivt heltal. Kirsten spiller et spil hvor hun starter med tallet 1 på en tavle. Hun kan så mange gange hun vil vælge et heltal j så $1 \leq j \leq n$, og erstatte tallet V på tavlen med tallet $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$. Her betegner $R(x)$ det nærmeste hele tal til x ; hvis x er præcis halvvejs mellem to på hinanden følgende hele tal rundes det op. Eksempelvis er $R(1,3) = 1$ og $R(1,5) = R(1,8) = 2$.

- Vis at der for hvert givet n findes et positivt heltal B så Kirsten aldrig kan få et tal større end B på tavlen.
- For ethvert givet n lad $f(n)$ være det største tal Kirsten kan opnå at have på tavlen efter endeligt mange erstatninger. Vis at der findes et positivt heltal N så der for alle $n \geq N$ gælder at 2026 deler $f(n)$.

Opgave 3. Lad \mathbb{R} være mængden af reelle tal. Bestem alle funktioner $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som opfylder at

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y),$$

for alle reelle tal x og y .