



Language: Czech

Day: 1

sobota 11. dubna 2026

**Úloha 1.** Tabulku velikosti  $2026 \times 2026$  nazveme *vínovou*, pokud je alespoň jedno z jejích  $2026^2$  políček obarveno červeně. Obdélníková oblast složená z políček je *lichó-červená*, pokud obsahuje lichý počet červeně obarvených políček. Určete největší kladné celé číslo  $M$  takové, že v každé vínové tabulce velikosti  $2026 \times 2026$  existuje lichó-červená obdélníková oblast s alespoň  $M$  políčky.

*Poznámka:* Obdélníková oblast má strany rovnoběžné se stranami tabulky a obsahuje celý svůj vnitřek.

**Úloha 2.** Uvažujme kladné celé číslo  $n$ . Majda hraje hru, kde začíná s číslem 1 napsaným na tabuli. Libovolně mnohokrát si může zvolit celé číslo  $j$  takové, že  $1 \leq j \leq n$ , a nahradit číslo  $V$  na tabuli číslem  $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$ . Zde  $R(x)$  označuje nejbližší celé číslo k  $x$ , přičemž pokud je  $x$  přesně mezi dvěma po sobě jdoucími celými čísly, zaokrouhlí se nahoru. Například  $R(1,3) = 1$  a  $R(1,5) = R(1,8) = 2$ .

- Dokažte, že pro každé  $n$  existuje kladné celé číslo  $B$  takové, že Majda nikdy nemůže na tabuli skončit s číslem větším než  $B$ .
- Pro libovolné číslo  $n$  označme  $f(n)$  maximální číslo, které je možné získat na tabuli po konečně mnoha nahrazeních. Dokažte, že existuje kladné celé číslo  $N$  takové, že pro všechna  $n \geq N$  je  $f(n)$  dělitelné číslem 2026.

**Úloha 3.** Necht  $\mathbb{R}$  značí množinu reálných čísel. Určete všechny funkce  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takové, že pro všechna reálná čísla  $x, y$  platí:

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y).$$

Language: Czech

Čas: 4 hodiny a 30 minut  
Každá úloha je hodnocena nejvýše 7 body