subota, 11. travnja 2026.

Zadatak 1. Ploča 2026×2026 je *bordoška* ako je barem jedno od njezinih 2026^2 jediničnih polja crveno. Pravokutno područje sastavljeno od polja ploče je *neparno-crveno* ako sadrži neparan broj crvenih polja. Odredi najveći mogući prirodni broj M takav da na svakoj bordoškoj ploči 2026×2026 postoji neparno-crveno pravokutno područje sastavljeno od barem M polja.

Napomena: Pravokutno područje ima stranice paralelne stranicama ploče i sadrži cijelu svoju unutrašnjost.

Zadatak 2. Za dani prirodni broj n, Marie igra igru koju počinje brojem 1 na ploči. Koliko god puta želi, bira prirodni broj j takav da vrijedi $1 \leq j \leq n$ i zamijeni broj V na ploči brojem $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$. Pritom, $R(x)$ označava broju x najbliži cijeli broj; ako je x jednako udaljen od dva uzastopna cijela broja, $R(x)$ označava veći od njih. Na primjer, $R(1.3) = 1$ i $R(1.5) = R(1.8) = 2$.

a) Dokaži da za svaki dani n, postoji prirodni broj B takav da Marie nikad ne može postići broj na ploči veći od B.

b) Za bilo koji n, neka je $f(n)$ najveći broj koji se može postići na ploči nakon konačno mnogo zamjena. Pokaži da postoji prirodni broj N takav da 2026 dijeli $f(n)$ za svaki $n \geq N$.

Zadatak 3. Neka je $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y).$$