



Language: Chinese (Traditional)

Day: 1

2026 年 4 月 11 日 星期六

問題 1. 一張 2026×2026 的方格棋盤是**加酒**的，若其 2026^2 格中有至少一格被塗成紅色。一個由若干格構成的長方形區域被稱為**奇加酒長方形**。若其中恰有奇數格被塗成紅色。試求最大的正整數 M ，使得在任何 2026×2026 的加酒棋盤上，皆存在大小至少 M 格的奇加酒長方形。

備註：一個長方形區域的邊與棋盤的邊平行，其長與寬可以相等，且包含其內部的所有格子。

問題 2. 給定正整數 n ，秦始皇玩一場遊戲。他首先在黑板上寫下一個 1。他接下來可以進行以下動作任意次：選擇滿足 $1 \leq j \leq n$ 的正整數 j ，並將黑板上的數字 V 改為 $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$ 。其中 $R(x)$ 表示最接近 x 的整數；若 x 恰在兩個相鄰整數的正中間，則取其中較大者。舉例來說， $R(1.3) = 1$ 而 $R(1.5) = R(1.8) = 2$ 。

(a) 證明：對於給定的 n ，存在正整數 $B > 0$ 使得秦始皇不可能在黑板上寫下大於 B 的數字。

(b) 對於給定的 n ，令 $f(n)$ 為秦始皇能夠透過有限次動作在黑板上寫出的最大數字。證明：存在正整數 N ，使得對於所有 $n \geq N$ ，2026 整除 $f(n)$ 皆成立。

問題 3. 令 \mathbb{R} 為所有實數所成集合。試求所有函數 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ，使得對於所有實數 x, y ，我們有

$$f\left((f(x) + f(y))^2\right) = (x + y)f(x + y).$$

Language: Chinese (Traditional)

考試時間：4 小時 30 分

每題 7 分