



Language: Chinese (Simplified)

Day: 1

2026年4月11日, 周六

题目 1. 如果 2026×2026 的棋盘格的 2026^2 个格子里至少有一个是红色的, 则称该棋盘格为**波尔多方**. 如果一个长方形区域包含奇数个红色方格, 则称其为**奇方**.

求: 最大的正整数 M , 使得任何 2026×2026 的波尔多方中, 都存在一个至少包含 M 个格子的奇方.

注: 一个长方形区域是一个由格子构成的长方形, 它的四边和棋盘格的四边平行.

题目 2. 给定正整数 n . 从黑板上的数 1 开始, 小钰做如下操作: 每一步中, 她先选一个整数 j , 满足 $1 \leq j \leq n$, 然后把黑板上的数 V 改成数 $j \cdot R(\frac{V}{j})$. 其中, $R(x)$ 表示和 x 最接近的整数; 如果 x 正好是连续两个整数的中点, 则向上取整. 例如, $R(1.3) = 1, R(1.5) = 2, R(1.8) = 2$.

- 证明: 对于每一个 n , 都存在一个正整数 B , 小钰永远不会在黑板上得到比 B 更大的数.
- 对于每一个给定的 n , 用 $f(n)$ 表示通过有限步操作后能在黑板上能得到的最大数. 证明: 存在一个正整数 N , 使得对所有 $n \geq N$, $f(n)$ 都能被 2026 整除.

题目 3. 记所有实数的集合为 \mathbb{R} . 求所有满足如下条件的函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: 对于任意实数 x, y , 都有

$$f\left((f(x) + f(y))^2\right) = (x + y)f(x + y).$$