Language: **Bulgarian**

Day: **1**

Събота, 11 април 2026

Задача 1. Една 2026×2026 дъска се нарича *бордо*, ако поне една от нейните 2026^2 клетки е оцветена в червено. Правоъгълна област от клетки се нарича *нечетно-правоъгълна* ако съдържа нечетен брой червени клетки. Намерете най-голямото естествено число M такова, че във всяка възможна 2026×2026 бордо дъска, може да се намери нечетно-правоъгълна област, съставена от поне M на брой клетки.

Бележка: Всяка правоъгълна област има страни успоредни на страните на дъската и съдържа всичките си вътрешни клетки.

Задача 2. На черна дъска е записано числото 1. За естествено число n, Мария играе следната игра: колкото пъти иска, тя може да избере цяло число j такова, че $1 \leq j \leq n$, и да замени числото V, записано на дъската, с числото $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$. Тук с $R(x)$ е означено най-близкото до x цяло число, като ако x се намира точно по средата между две последователни цели числа, то се закръгля нагоре. Например, $R(1.3) = 1$ и $R(1.5) = R(1.8) = 2$.

а) Докажете, че за всяко дадено n, съществува естествено число B такова, че Мария никога не може да запише на черната дъска число по-голямо от B.

б) За всяко n, с $f(n)$ означаваме най-голямото число, което Мария може да запише на дъската след краен брой замени. Покажете, че съществува естествено число N такова, че за всяко $n \geq N$, е изпълнено, че 2026 дели $f(n)$.

Задача 3. Нека $\mathbb{R}$ е множеството на реалните числа. Намерете всички функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такива, че за всички реални числа x, y е в сила:

$$f\left(\left(f(x) + f(y)\right)^2\right) = (x + y)f(x + y).$$