Language: **Bosnian**

Day: **1**

subota, 11. april 2026.

Zadatak 1. Ploču 2026×2026 nazivamo *bordo* ako je bar jedan od njenih 2026^2 jediničnih kvadratića obojen u crveno. Pravougaona regija sastavljena od kvadratića je *neparno-crvena* ako sadrži neparan broj crvenih kvadratića. Odrediti najveći prirodan broj M takav da, u svakoj mogućoj 2026×2026 bordo ploči, postoji neparno-crvena pravougaona regija sa bar M kvadratića.

Napomena: Pravougaona regija ima stranice koje su paralelne stranicama ploče, i sadrži svoju cjelokupnu unutrašnjost.

Zadatak 2. Za dati prirodan broj n, Marija igra igru u kojoj počinje sa brojem 1 napisanim na tabli. Marija može, koliko god puta to želi, odabrati prirodan broj j takav da je $1 \leq j \leq n$ i zamijeniti trenutni broj V na tabli sa brojem $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$. Pri tome, $R(x)$ označava najbliži cijeli broj broju x; ako je x na jednakoj udaljenosti od dva uzastopna cijela broja, zaokružuje se na gore. Na primjer, $R(1{,}3) = 1$ i $R(1{,}5) = R(1{,}8) = 2$.

a) Dokazati da za svako n postoji prirodan broj B, takav da Marija nikad ne može dobiti broj veći od B na tabli.

b) Za svako n, neka je $f(n)$ najveći broj koji se može dobiti na tabli nakon konačnog broja zamjena. Dokazati da postoji prirodan broj N, takav da za sve $n \geq N$ vrijedi da 2026 dijeli $f(n)$.

Zadatak 3. Označimo sa $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva. Odrediti sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x, y vrijedi:

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y).$$

Vrijeme rada: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.