শনিবার, ১১ এপ্রিল ২০২৬

সমস্যা ১. একটি 2026×2026 বোর্ডকে *বোর্দো* বলা হবে যদি এর 2026^2-টি ঘরের মধ্যে অন্তত একটি লাল রং করা হয়। ঘরগুলো দিয়ে বানানো একটি আয়তাকার অঞ্চলকে *অদ্ভুত-আয়ত* বলা হবে যদি এর মধ্যে বিজোড় সংখ্যক লাল ঘর থাকে। এমন সবচেয়ে বড় ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা M বের করো যেন সম্ভাব্য সকল 2026×2026 *বোর্দো* বোর্ডেই এমন অদ্ভুত-আয়ত আছে যাতে কমপক্ষে M-টি ঘর আছে।

দ্রষ্টব্য: একটি আয়তাকার অঞ্চলের বাহুগুলো বোর্ডের বাহুগুলোর সমান্তরাল হবে, এবং এর মধ্যকার সবগুলো ঘর এর ভেতরেই থাকবে।

সমস্যা ২. একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n দেওয়া আছে। মেরি একটি খেলা খেলছে যেখানে সে একটি ব্ল্যাকবোর্ডে 1 সংখ্যাটি দিয়ে শুরু করে। সে যতবার খুশি ততবার সে নিচের কাজটি করতে পারবে: সে এমন একটি পূর্ণসংখ্যা j বেছে নিতে পারে যেন $1 \leq j \leq n$ হয়, এবং ব্ল্যাকবোর্ডে লেখা থাকা V সংখ্যাটিকে মুছে $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$ লিখতে পারে। এখানে $R(x)$ হলো x-এর সবচেয়ে কাছের পূর্ণসংখ্যা; যদি x দুইটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যার ঠিক মাঝে থাকে, তাহলে সেটাকে পরের পূর্ণসংখ্যায় রাউন্ড করা হবে। যেমন: $R(1.3) = 1$ এবং $R(1.5) = R(1.8) = 2$.

(ক) প্রমাণ করো যে সকল n এর জন্যই এমন একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা B আছে যেন মেরি কখনোই ব্ল্যাকবোর্ডে B-এর চেয়ে বড় সংখ্যা পাবে না।

(খ) প্রতিটি n এর জন্য, ধরো $f(n)$ হলো বোর্ডে সসীম সংখ্যক ধাপে পাওয়া সর্বোচ্চ সংখ্যা। দেখাও যে এমন একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা N আছে যেন সকল $n \geq N$ এর জন্যই 2026 দ্বারা $f(n)$ নিঃশেষে বিভাজ্য।

সমস্যা ৩. $\mathbb{R}$ হলো সকল বাস্তব সংখ্যার সেট। এমন সব ফাংশন $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ বের করো যেন সকল বাস্তব সংখ্যা x, y এর জন্যই নিচের সমীকরণটি সত্যি হয়:

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y).$$