Շաբաթ, Ապրիլի 11, 2026թ.

Խնդիր 1. 2026×2026 փախփակը կոչվում է *կարմրավուն*, եթե դրա 2026^2 վանդակներից գոնե մեկը ներկված է կարմիր գույնով: Տախտակի՝ վանդակներից կազմված ուղղանկյունաձև մասը կանվանենք *կենտ-ուղղանկյունաձև*, եթե այն պարունակում է կենտ քանակությամբ կարմիր վանդակներ: Գտե՛ք ամենամեծ M բնական թիվը, որի համար ցանկացած 2026×2026 կարմրավուն փախփակում կա ամենա–քիչը M վանդակից բաղկացած կենտ-ուղղանկյունաձև մաս:

Նշում. Տախտակի ուղղանկյաձև մասի կողմերը պետք է լինեն փախփակի կողմերին զուգահեռ: Համարում ենք, որ ուղղանկյունաձև մասը բաղկացած է իր կողմերի ներսում գտնվող բոլոր վանդակներից:

Խնդիր 2. Տրված է n բնական թիվը: Մարին խաղում է խաղ. նա գրատախտակին գրում է 1 և թույլատրվող քայլերի օգնությամբ հաջորդաբար փոփոխում է գրատախտակին գրված թիվը: Ամեն քայլի նա կարող է ընտրել $1 \leq j \leq n$ պայմանին բավարարող j բնական թիվ և գրատախտակին գրված V թիվը փոխարինել $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$ թվով: Այստեղ $R(x)$-ով նշանակված է x-ին ամենամոտ ամբողջ թիվը. եթե x-ը երկու հաջորդական ամբողջ թվերի ուղիղ մեջտեղում է, այն կլորացվում է վերև: Օրինակ՝ $R(1.3) = 1$ և $R(1.5) = R(1.8) = 2$:

ա) Ապացուցե՛ք, որ տրված n-ի համար գոյություն ունի այնպիսի B բնական թիվ, որից մեծ թիվ Մարին չի կարողանա գրել գրատախտակին:

բ) Դիցուք կամայական տրված n-ի համար $f(n)$-ը հնարավոր ամենամեծ թիվն է, որ Մարին կարող է գրել գրատախտակին վերջավոր քանակությամբ քայլերից հետո: Ապացուցե՛ք, որ գոյություն ունի N բնական թիվ, այնպիսին, որ ցանկացած $n \geq N$ համար $f(n)$-ը բաժանվում է 2026-ի:

Խնդիր 3. Դիցուք $\mathbb{R}$-ը իրական թվերի բազմությունն է: Գտե՛ք բոլոր $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ֆունկցիաները, որոնց համար

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y)$$

հավասարությունը տեղի ունի կամայական x, y իրական թվերի համար: