Language: Arabic

Day: 1

Saturday, April 11, 2026

السؤال الأول: يقال لشبكة $\mathbf{2026 \times 2026}$ أنها *بوردو* إذا كانت خلية واحدة على الأقل من خلاياها الـ $\mathbf{2026^2}$ ملونة باللون الأحمر. يقال للمنطقة المستطيلة المكونة من خلايا الشبكة أنها *منطقة مستطيلة فردية* إذا كانت تحتوي على عدد فردي من الخلايا الحمراء. أوجد أكبر عدد صحيح موجب $\boldsymbol{M}$ بحيث في أي شبكة ممكنة $\mathbf{2026 \times 2026}$ وبوردو، يوجد منطقة مستطيلة فردية تحتوي على $\boldsymbol{M}$ خلية على الأقل.

ملاحظة: المنطقة المستطيلة هي عبارة عن المنطقة الداخلية للمستطيل المحصور بين خطين شبكيين أفقيين مع خطين شبكيين رأسيين.

السؤال الثاني: معطى عدد صحيح موجب $\boldsymbol{n}$، تلعب ماري لعبة حيث تبدأ بالعدد $\mathbf{1}$ مكتوبا على السبورة. بقدر ما تريد، يمكن لماري أن تختار عدد صحيح $\boldsymbol{j}$ بحيث $\mathbf{1 \le j \le n}$ وتستبدل العدد $\boldsymbol{V}$ المكتوب على السبورة بالعدد $\boldsymbol{j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)}$.

هنا، $\boldsymbol{R(x)}$ تشير لأقرب عدد صحيح إلى $\boldsymbol{x}$، إذا كان $\boldsymbol{x}$ في منتصف المسافة بين عددين صحيحين متتاليين بالضبط، فإنه يُقرب للعدد الأكبر. على سبيل المثال، $\boldsymbol{R(1.3) = 1,\ R(1.5) = R(1.8) = 2}$.

a) أثبت أنه لكل $\boldsymbol{n}$ معطاة، يوجد عدد صحيح موجب $\boldsymbol{B}$، بحيث أن ماري لا يمكن أن تنتهي بعدد أكبر من $\boldsymbol{B}$ على السبورة.

b) لكل $\boldsymbol{n}$ معطاة، ليكن $\boldsymbol{f(n)}$ هو أكبر عدد يمكن الوصول اليه (على السبورة) بعد عدد نهائي من الخطوات. أثبت أنه يوجد عدد صحيح $\boldsymbol{N}$ بحيث لكل $\boldsymbol{n \ge N}$، لدينا $\mathbf{2026}$ تقسم $\boldsymbol{f(n)}$.

السؤال الثالث: لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية. أوجد جميع الدوال $\boldsymbol{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ بحيث لكل عددين حقيقيين $\boldsymbol{x, y}$، لدينا التالي:

$$\boldsymbol{f\left(\left(f(x) + f(y)\right)^2\right) = (x + y)f(x + y)}$$

Language: Arabic

Time: 4 hours and 30 minutes
Each problem is worth 7 points