Language: **Albanian (Kosovo)**

Day: **1**

E shtunë, 11 Prill 2026

Problemi 1. Një tabelë me dimensione 2026×2026 themi se është *bordeaux* nëse të paktën një nga 2026^2 katrorët njësi të saj është e ngjyrosur me të kuqe. Një zonë drejtkëndëshe e formuar nga katrorët njësi quhet *drejtkëndëshe-teke* nëse përmban numër tek katrorësh njësi me ngjyrë të kuqe. Gjeni numrin më të madh natyror M të tillë që, në çdo tabelë bordeaux 2026×2026 të mundshme, ekziston një zonë drejtkëndëshe-teke me të paktën M katrorë njësi.
Shënim: Një zonë drejtkëndëshe i ka brinjët paralele me brinjët e tabelës dhe përmban të gjithë katrorët njësi brenda saj.

Problemi 2. Është dhënë numri natyror n. Maria luan një lojë ku ajo fillon me numrin 1 të shkruar në tabelë. Sa herë që ajo dëshiron, ajo mund të zgjedhë një numër të plotë j të tillë që $1 \leq j \leq n$ dhe ta zëvendësojë numrin V që është në tabelë me numrin $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$. Këtu, me $R(x)$ shënohet numri i plotë më i afërt me x; nëse x është saktësisht në mes dy numrave të plotë njëpasnjëshëm, rrumbullaksohet lart. Për shembull, $R(1.3) = 1$ dhe $R(1.5) = R(1.8) = 2$.

a) Vërtetoni se për çdo n të dhënë, ekziston një numër natyror B i tillë që Maria nuk mundet të shkruajë një numër më të madh se B në tabelë.

b) Për çdo numër të dhënë n, le të jetë $f(n)$ numri maksimal që mund të arrihet në tabelë pas një numri të fundëm zëvendësimesh. Vërtetoni se ekziston numri natyror N i tillë që për të gjithë $n \geq N$, kemi që $f(n)$ plotpjesëtohet me 2026.

Problemi 3. Shënojmë me $\mathbb{R}$ bashkësinë e numrave realë. Gjeni të gjitha funksionet $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ të tillë që për të gjithë numrat realë x, y, vlen:

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y)f(x + y).$$