



pondelok 14. apríl 2025

**Úloha 4.** Nech  $ABC$  je ostrouhlý trojuholník so stredom kružnice vpísanej  $I$ , pre ktorý platí  $|AB| \neq |AC|$ . Priamky  $BI$  a  $CI$  pretnú kružnicu opísanú trojuholníku  $ABC$  postupne v bodoch  $P \neq B$  a  $Q \neq C$ . Uvažujme body  $R$  a  $S$  také, že  $AQRB$  a  $ACSP$  sú rovnobežníky (platí  $AQ \parallel RB$ ,  $AB \parallel QR$ ,  $AC \parallel SP$  a  $AP \parallel CS$ ). Označme  $T$  priesečník priamok  $RB$  a  $SC$ . Dokážte, že body  $R$ ,  $S$ ,  $T$  a  $I$  ležia na kružnici.

**Úloha 5.** Nech  $n > 1$  je celé číslo. V konfigurácii tabuľky  $n \times n$  je na každom z  $n^2$  políčok nakreslená šípka, ktorá ukazuje buď hore, dole, doľava, alebo doprava. Pre danú počiatočnú konfiguráciu, slimák Turbo začína v jednom z políčok tabuľky a cestuje z políčka na políčko. V každom kroku sa Turbo pohne o jedno políčko v smere šípky nakreslenej na políčku, na ktorom sa práve nachádza (môže sa stať, že z tabuľky odíde). Po každom kroku sa šípky vo všetkých políčkach otočia o  $90^\circ$  v protismere hodinových ručičiek. Políčko nazveme *dobré*, ak začínajúc z tohoto políčka Turbo navštívi každé políčko práve raz, bez odchádzania z tabuľky, a vráti sa do políčka, kde začína. V závislosti od  $n$  určte najväčší počet dobrých políčok zo všetkých možných počiatočných konfigurácií.

**Úloha 6.** V každom políčku  $2025 \times 2025$  tabuľky je napísané nezáporné reálne číslo tak, aby platilo, že súčet čísel v každom riadku je rovný 1 a zároveň súčet čísel v každom stĺpci je rovný 1. Označme  $r_i$  najväčšie číslo v riadku  $i$  a nech  $R = r_1 + r_2 + \dots + r_{2025}$ . Podobne, označme  $c_i$  najväčšie číslo v stĺpci  $i$  a nech  $C = c_1 + c_2 + \dots + c_{2025}$ . Aká je najväčšia možná hodnota  $\frac{R}{C}$ ?