Luni, 14 aprilie 2025

Problema 4. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic cu $AB \neq AC$ și I centrul cercului său înscris. Dreptele BI și CI taie cercul circumscris triunghiului ABC în $P \neq B$ și, respectiv, în $Q \neq C$. Punctele R și S sunt luate astfel încât $AQRB$ și $ACSP$ sunt paralelograme (cu $AQ \parallel RB$, $AB \parallel QR$, $AC \parallel SP$ și $AP \parallel CS$). Fie T punctul de intersecție a dreptelor RB și SC. Demonstrați că punctele R, S, T și I sunt conciclice.

Problema 5. Fie $n > 1$ un număr natural. Într-o *configurație* a unei table $n \times n$, fiecare dintre cele n^2 celule conține o săgeată orientată în sus, în jos, spre stânga sau spre dreapta. Dându-se o configurație inițială, melcul Turbo pornește dintr-una din celulele tablei și trece dintr-o celulă în alta. La fiecare mișcare, Turbo se deplasează cu o celulă în direcția indicată de săgeata din celula în care află (eventual, părăsind tabla). După fiecare mișcare, toate săgețile se rotesc cu $90°$ în sens antiorar. Vom spune că o celulă este *bună* dacă, pornind din acea celulă, Turbo vizitează fiecare celulă a tablei exact o dată, fără a părăsi tabla și ajungând, la ultima mișcare, în celula inițială. Determinați, în funcție de n, numărul maxim de celule bune, atunci când considerăm toate configurațiile inițiale posibile.

Problema 6. În fiecare celulă a unei table 2025×2025 este scris un număr real nenegativ, astfel încât suma numerelor din fiecare linie este egală cu 1 și suma numerelor din fiecare coloană este egală cu 1. Fie r_i cel mai mare număr din linia i și $R = r_1 + r_2 + \cdots + r_{2025}$. Fie c_i cel mai mare număr din coloana i și $C = c_1 + c_2 + \cdots + c_{2025}$.

Care este valoarea maximă posibilă a raportului $\frac{R}{C}$?

Timp: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă valorează 7 puncte