



pondělí 14. dubna 2025

Úloha 4. V ostroúhlém trojúhelníku ABC , ve kterém $|AB| \neq |AC|$, označme I střed jeho kružnice vepsané. Přímkou BI a CI protnou kružnici opsanou trojúhelníku ABC postupně v bodech $P \neq B$ a $Q \neq C$. Uvažujme body R a S takové, že $AQRB$ i $APSC$ jsou rovnoběžníky (přičemž $AQ \parallel RB$, $AB \parallel QR$, $AC \parallel SP$ a $AP \parallel CS$). Označme T průsečík přímkou RB a SC . Dokažte, že body R, S, T, I leží na jedné kružnici.

Úloha 5. Uvažujme celé číslo $n > 1$. V konfiguraci tabulky $n \times n$ je na každém z n^2 políček nakreslena šipka směřující nahoru, dolů, doleva, nebo doprava. Pro danou počáteční konfiguraci šnek Turbo začíná na jednom políčku tabulky a pohybuje se z jednoho políčka na druhé. Při každém pohybu se Turbo pohne o jedno políčko ve směru šipky nakreslené na políčku, kde se zrovna nachází (může se stát, že tabulku opustí). Po každém pohybu se šipky na všech políčkách otočí o 90° proti směru hodinových ručiček. Políčko nazveme *dobré*, pokud začínající na tomto políčku Turbo navštíví každé políčko tabulky přesně jednou aniž by přitom tabulku opustil a vrátí se na políčko, odkud začal. V závislosti na n určete největší počet dobrých políček ze všech možných počátečních konfigurací.

Úloha 6. Na každém políčku tabulky 2025×2025 je napsáno nezáporné reálné číslo tak, že součet čísel v každém řádku je roven 1 a také součet čísel v každém sloupci je roven 1. Označme r_i největší číslo v i -tém řádku a $R = r_1 + r_2 + \dots + r_{2025}$. Analogicky označme c_i největší číslo v i -tém sloupci a $C = c_1 + c_2 + \dots + c_{2025}$.

Jaká je největší možná hodnota R/C ?