



2025 年 4 月 14 日, 星期一

题目 4. 设 I 为锐角三角形 ABC 的内心, 且 $AB \neq AC$. 设直线 BI 和直线 CI 分别交三角形 ABC 的外接圆于点 $P \neq B$ 和点 $Q \neq C$. 取点 R 与点 S 使得 $AQRB$ 与 $ACSP$ 都是平行四边形 (其中 $AQ \parallel RB, AB \parallel QR, AC \parallel SP, AP \parallel CS$). 设直线 RB 与直线 SC 交于点 T . 证明: R, S, T, I 四点共圆.

题目 5. 给定整数 $n > 1$. 一个 $n \times n$ 的棋盘称为方向图, 如果它 n^2 个方格中每格内都放有一个箭头, 指向为上、下、左、右之一.

对一个初始的方向图, 极速蜗牛从棋盘的某个方格内出发在棋盘上移动. 每次移动时, 蜗牛沿着所在方格内箭头的方向前进一格 (它有可能会走出棋盘). 蜗牛每移动一次后, 棋盘上所有的箭头同时逆时针旋转 90° . 我们称一个方格是好的, 如果蜗牛从此格出发按上述方式移动, 它将经过棋盘每个方格恰好一次, 且不会走出棋盘, 并最后回到初始的方格.

对给定的 n , 求在所有可能的初始方向图中, 好方格个数的最大值.

题目 6. 已知在 2025×2025 方格表的每个方格中写有一个非负实数, 满足每一行的所有数之和为 1, 且每一列的所有数之和为 1. 记 r_i 为第 i 行中所有数的最大值, 并记 $R = r_1 + r_2 + \cdots + r_{2025}$. 类似的, 记 c_i 为第 i 列中所有数的最大值, 并记 $C = c_1 + c_2 + \cdots + c_{2025}$.

求 $\frac{R}{C}$ 的最大可能值.