EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

Недела, Април 13, 2025

Задача 1. За позитивен цел број N, нека $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ се сите позитивни цели броеви помали од N што се заемно прости со N. Најди ги сите $N \geq 3$ такви што

$$\text{НЗД}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

за сите $1 \leq i \leq m-1$.

Каде НЗД(a, b) е најголемиот позитивен цел делител и на a и на b. Целите броеви a и b се заемно прости ако НЗД$(a, b) = 1$.

Задача 2. Бесконечна растечка низа $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ од позитивни цели броеви се нарекува централна ако за секој позитивен цел број n, аритметичката средина на првите a_n членови на низата е еднаква на a_n.

Докажи дека постои бесконечна низа b_1, b_2, b_3, $\ldots$ од позитивни цели броеви таква што за секоја централна низа a_1, a_2, a_3, $\ldots$, постојат бесконечно многу позитивни цели броеви n за кои важи $a_n = b_n$.

Задача 3. Нека ABC е остроаголен триаголник. Точките B, D, E и C лежат на иста права во тој редослед и важи $BD = DE = EC$. Нека M и N се средишни точки на AD и AE, соодветно. Нека H е ортоцентар за остроаголниот триаглник ADE. Нека P и Q се точки од правите BM и CN, соодветно, такви што D, H, M и P лежат на иста кружница и по парови се различни, и E, H, N и Q лежат на иста кружница и по парови се различни. Докажи дека P, Q, N и M лежат на иста кружница.

Точката во која се сечат висините на триаголникот се нарекува ортоцентар.

Време: 4 часа и 30 минути
Секоја задача се вреднува со 7 поени