



Sekmadienis, Balandžio 13, 2025

Uždavinys 1. Teigiamam sveikajam skaičiui N , tegul $c_1 < c_2 < \dots < c_m$ yra visi teigiami sveikieji skaičiai, kurie yra mažesni nei N bei tarpusavyje pirminiai su N . Raskite visus $N \geq 3$ tokius, kad:

$$\text{dbd}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

visiems $1 \leq i \leq m - 1$.

Čia $\text{dbd}(a, b)$ yra didžiausias teigiamas sveikasis skaičius dalantis ir a ir b . Sveikieji skaičiai a ir b yra tarpusavyje pirminiai jei $\text{dbd}(a, b) = 1$.

Uždavinys 2. Begalinė teigiamų sveikųjų skaičių seka $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ vadinama *centrine*, jei bet kuriam sveikajam skaičiui n , pirmųjų a_n sekos narių aritmetinis vidurkis lygus a_n .

Parodykite, jog egzistuoja begalinė teigiamų sveikųjų skaičių seka b_1, b_2, b_3, \dots tokia, kad bet kuriai centrinei sekai a_1, a_2, a_3, \dots , yra be galo daug tokių sveikųjų teigiamų skaičių n , kuriems $a_n = b_n$.

Uždavinys 3. Tegul ABC smailusis trikampis. Taškai B, D, E , ir C pažymėti tokia tvarka vienoje tiesėje taip, kad $BD = DE = EC$. Tegul M ir N žymi atkarpų AD ir AE vidurio taškus atitinkamai. Tarkime trikampis ADE smailusis ir taškas H yra jo ortocentras. Taškai P ir Q pažymėti tiesėse BM ir CN atitinkamai, taip kad taškai D, H, M , ir P priklauso vienam apskritimui ir yra poromis skirtingi, bei taškai E, H, N , ir Q priklauso vienam apskritimui ir yra poromis yra skirtingi. Įrodykite, jog P, Q, N , ir M priklauso vienam apskritimui.

Trikampio ortocentru vadinamas trikampio aukštinių susikirtimo taškas.