EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

Language: **Hebrew**

Day: **1**

יום ראשון, 13 באפריל, 2025

שאלה 1. עבור מספר שלם חיובי N, יהיו $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ כל השלמים החיוביים הקטנים מ-N אשר זרים ל-N. מצאו את כל המספרים $N \geq 3$ כך ש:

$$\gcd(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

לכל $1 \leq i \leq m-1$.

כאן $gcd(a,b)$ הוא המספר השלם החיובי הגדול ביותר שמחלק את a ו-b. a ו-b יקראו זרים אם $gcd(a,b) = 1$.

שאלה 2. סדרה אינסופית עולה $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ של שלמים חיוביים תקרא *מרכזית* אם לכל שלם חיובי n, הממוצע של a_n האיברים הראשונים בסדרה שווה ל-a_n.

הראו שקיימת סדרה אינסופית $b_1, b_2, b_3, \ldots$ של שלמים חיוביים המקיימת שלכל סדרה מרכזית $a_1, a_2, a_3, \ldots$ יש אינסוף שלמים חיוביים n כך ש-$a_n = b_n$.

שאלה 3. יהי ABC משולש חד זוויות. הנקודות B, D, E, C על ישר אחד בסדר הזה, ומקיימות $BD = DE = EC$. יהיו M ו-N האמצעים של AD ו-AE בהתאמה. נניח כי ADE משולש חד זוויות, ויהי H מפגש הגבהים במשולש ADE. יהיו P ו-Q נקודות על הישרים BM ו-CN, בהתאמה, כך ש- D, H, M, P 4 נקודות שונות על מעגל אחד, ו- E, Q, N, H 4 נקודות שונות על מעגל אחד. הוכיחו ש- P, Q, N, M על מעגל אחד.

Language: Hebrew

משך הבחינה 4 שעות ו-30 דקות
כל שאלה שווה 7 נקודות