



Sunnuntai, 13. huhtikuuta 2025

Tehtävä 1. Positiiviselle kokonaisluvulle N , olkoot $c_1 < c_2 < \dots < c_m$ kaikki positiiviset kokonaisluvut, jotka ovat pienempiä kuin N ja yhteistekijättömiä luvun N kanssa. Etsi kaikki $N \geq 3$, joille

$$\text{syt}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

kaikilla $1 \leq i \leq m - 1$.

Tässä $\text{syt}(a, b)$ on suurin positiivinen kokonaisluku, joka jakaa molemmat a ja b . Kokonaisluvut a ja b ovat yhteistekijättömiä, jos $\text{syt}(a, b) = 1$.

Tehtävä 2. Sanotaan, että ääretön positiivisista kokonaisluvuista koostuva kasvava lukujono $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ on *keskeinen*, jos jokaisella positiivisella kokonaisluvulla n , lukujonon ensimmäisten a_n luvun aritmeettinen keskiarvo on yhtä suuri kuin a_n .

Osoita, että on olemassa ääretön positiivisista kokonaisluvuista koostuva lukujono b_1, b_2, b_3, \dots , jolla jokaiselle keskeiselle lukujonolle a_1, a_2, a_3, \dots on olemassa äärettömän monta positiivista kokonaislukua n , joilla $a_n = b_n$.

Tehtävä 3. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio. Pisteet B, D, E ja C sijaitsevat tässä järjestyksessä samalla suoralla siten, että $BD = DE = EC$. Olkoot M ja N janojen AD ja AE keskipisteet vastaavasti. Oletetaan, että kolmio ADE on terävä ja olkoon H sen ortokeskus. Olkoot pisteet P ja Q suorilla BM ja CN , vastaavasti siten, että D, H, M sekä P sijaitsevat samalla ympyrällä ja ovat pareittain erisuuret, ja E, H, N sekä Q sijaitsevat samalla ympyrällä ja ovat pareittain erisuuret. Osoita, että pisteet P, Q, N sekä M sijaitsevat samalla ympyrällä.

Kolmion ortokeskus on sen korkeusjanojen leikkauspiste.