EGMO 2025
European Girls' Mathematical Olympiad
KOSOVA

Language: **Czech**

Day: **1**

neděle 13. dubna 2025

Úloha 1. Pro kladné celé číslo N označme $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ všechna kladná celá čísla menší než N, která jsou s N nesoudělná. Najděte všechna $N \geq 3$ taková, že

$$\mathrm{NSD}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

pro všechna $1 \leq i \leq m - 1$.

Symbolem NSD(a, b) rozumíme největší kladné celé číslo, které dělí a i b. Celá čísla a, b nazýváme nesoudělná, pokud NSD$(a, b) = 1$.

Úloha 2. Nekonečnou rostoucí posloupnost $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ kladných celých čísel nazveme *vycentrovanou*, pokud pro každé přirozené číslo n aritmetický průměr prvních a_n členů této posloupnosti je roven a_n.

Dokažte, že existuje nekonečná posloupnost $b_1, b_2, b_3, \ldots$ kladných celých čísel takových, že pro každou vycentrovanou posloupnost a_1, a_2, a_3, … existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n, pro která $a_n = b_n$.

Úloha 3. Uvažujme ostroúhlý trojúhelník ABC. Body B, D, E, C leží na přímce v tomto pořadí a splňují $|BD| = |DE| = |EC|$. Označme M a N postupně středy úseček AD a AE. Předpokládejme, že trojúhelník ADE je ostroúhlý a označme jeho ortocentrum H. Nakonec označme P a Q postupně body na přímkách BM a CN takové, že D, H, M, P jsou navzájem různé a leží na jedné kružnici a E, H, N, Q jsou navzájem různé a leží na jedné kružnici. Dokažte, že P, Q, N, M leží na jedné kružnici.

Ortocentrem trojúhelníku rozumíme průsečík jeho výšek.

Čas na řešení: 4 hodiny a 30 minut
Za každou úlohu lze získat až 7 bodů