



2025 年 4 月 13 日, 星期日

题目 1. 对正整数 N , 记 $c_1 < c_2 < \dots < c_m$ 为所有小于 N 且与 N 互素的正整数. 求所有满足下述条件的整数 $N \geq 3$: 对任意 $1 \leq i \leq m-1$ 均有

$$\gcd(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1.$$

这里, $\gcd(a, b)$ 表示同时整除 a 和 b 的最大正整数. 整数 a 和 b 称为互素的, 如果 $\gcd(a, b) = 1$.

题目 2. 一个严格递增的无穷正整数序列 $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ 称为中立的, 如果对每个正整数 n , 该序列前 a_n 项的算术平均值恰好是 a_n .

证明: 存在一个无穷正整数序列 b_1, b_2, b_3, \dots , 使得对任意一个中立的序列 a_1, a_2, a_3, \dots , 都存在无穷多个正整数 n 满足 $a_n = b_n$.

题目 3. 设 ABC 为锐角三角形. 点 B, D, E, C 在一条直线上依次排列, 满足 $BD = DE = EC$. 记 M 和 N 分别为线段 AD 和 AE 的中点. 假设 ADE 为锐角三角形, 并记其垂心为 H . 设 P 为直线 BM 上一点, 满足 D, H, M, P 两两不同且四点共圆. 设 Q 为直线 CN 上一点, 满足 E, H, N, Q 两两不同且四点共圆.

证明: P, Q, N, M 四点共圆.

注: 一个三角形的垂心是它三条高的交点.