



Language: **Ukrainian**

Day: **2**

Неділя, 14 квітня, 2024

Задача 4. Для послідовності цілих чисел $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ пара (a_i, a_j) з $1 \leq i < j \leq n$ називається *цікавою*, якщо існує така пара чисел (a_k, a_ℓ) з $1 \leq k < \ell \leq n$, що

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Для кожного $n \geq 3$, знайдіть найбільшу можливу кількість цікавих пар у послідовності довжини n .

Задача 5. Нехай \mathbb{N} позначає множину натуральних чисел. Знайдіть усі функції $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, для яких для довільної пари натуральних чисел (x, y) справджуються такі умови:

- (i) x і $f(x)$ мають однакову кількість натуральних дільників;
- (ii) Якщо x не ділиться націло на y і y не ділиться націло на x , то

$$\text{НСД}(f(x), f(y)) > f(\text{НСД}(x, y)).$$

Тут через $\text{НСД}(m, n)$ позначено найбільше натуральне число, яке ділить m та n одночасно.

Задача 6. Знайдіть всі натуральні числа d , для яких існує такий поліном P степеня d з дійсними коефіцієнтами, що серед чисел $P(0), P(1), P(2), \dots, P(d^2 - d)$ є не більше ніж d різних.