



Language: Spanish

Day: 2

*Domingo, 14 de abril de 2024*

**Problem 4.** Para una sucesión  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  de enteros, decimos que una pareja  $(a_i, a_j)$  con  $1 \leq i < j \leq n$  es *interesante* si existe una pareja  $(a_k, a_\ell)$  de enteros con  $1 \leq k < \ell \leq n$  tal que

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Para cada  $n \geq 3$ , encuentre el mayor número posible de parejas interesantes en una sucesión de longitud  $n$ .

**Problem 5.** Sea  $\mathbb{N}_{>0}$  el conjunto de enteros positivos. Encuentre todas las funciones  $f: \mathbb{N}_{>0} \rightarrow \mathbb{N}_{>0}$  tales que para toda pareja de enteros positivos  $(x, y)$  se cumplen las siguientes condiciones:

- (i)  $x$  y  $f(x)$  tienen el mismo número de divisores positivos.
- (ii) Si  $x$  no divide a  $y$  e  $y$  no divide a  $x$ , entonces

$$\text{mcd}(f(x), f(y)) > f(\text{mcd}(x, y)).$$

*Aquí  $\text{mcd}(m, n)$  es el mayor entero positivo que divide a  $m$  y  $n$ .*

**Problem 6.** Encuentre todos los enteros positivos  $d$  para los cuales existe un polinomio  $P$  de grado  $d$  con coeficientes reales tal que  $P(0), P(1), P(2), \dots, P(d^2 - d)$  son a lo sumo  $d$  valores distintos.