



Language: **Slovenian**

Day: **2**

Nedelja, 14. april 2024

Naloga 4. Za zaporedje celih števil $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ je par (a_i, a_j) , pri čemer je $1 \leq i < j \leq n$, *zanimiv*, če obstaja par celih števil (a_k, a_ℓ) , pri čemer je $1 \leq k < \ell \leq n$, da velja

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Za vsak $n \geq 3$ poišči največje možno število zanimivih parov v zaporedju dolžine n .

Naloga 5. Naj bo \mathbb{N} množica naravnih števil. Poišči vse funkcije $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, za katere veljata naslednja pogoja za vsak par naravnih števil (x, y) :

- (i) x in $f(x)$ imata enako število pozitivnih deliteljev.
- (ii) Če x ne deli y in y ne deli x , potem

$$\gcd(f(x), f(y)) > f(\gcd(x, y)).$$

Pri tem je $\gcd(m, n)$ največje naravno število, ki deli obe izmed števil m in n .

Naloga 6. Poišči vsa naravna števila d , za katera obstaja tak polinom P stopnje d z realnimi koeficienti, da je med $P(0), P(1), P(2), \dots, P(d^2 - d)$ največ d različnih vrednosti.