



Language: **Slovak**

Day: **2**

nedela, 14. apríla 2024

**Úloha 4.** Pre postupnosť  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  celých čísel nazvime dvojicu  $(a_i, a_j)$  celých čísel, kde  $1 \leq i < j \leq n$ , *zaujímavou*, ak existuje dvojica  $(a_k, a_\ell)$  celých čísel, kde  $1 \leq k < \ell \leq n$ , taká, že

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Pre každé celé číslo  $n \geq 3$  určte najväčší možný počet zaujímavých dvojíc v postupnosti dĺžky  $n$ .

**Úloha 5.** Označme  $\mathbb{N}$  množinu kladných celých čísel. Nájdite všetky funkcie  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  také, že pre ľubovoľnú dvojicu  $(x, y)$  kladných celých čísel sú splnené nasledovné podmienky:

- (i)  $x$  a  $f(x)$  majú rovnaký počet kladných deliteľov.
- (ii) Ak  $x$  nie je deliteľom  $y$  a súčasne  $y$  nie je deliteľom  $x$ , tak

$$\text{NSD}(f(x), f(y)) > f(\text{NSD}(x, y)).$$

*Zápis*  $\text{NSD}(m, n)$  označuje najväčšie kladné celé číslo, ktoré je deliteľom  $m$  aj  $n$ .

**Úloha 6.** Nájdite všetky kladné celé čísla  $d$ , pre ktoré existuje polynóm  $P$  stupňa  $d$  s reálnymi koeficientmi taký, že medzi hodnotami  $P(0), P(1), P(2), \dots, P(d^2 - d)$  je najviac  $d$  rôznych.

Language: Slovak

Čas: 4 hodiny a 30 minút  
Za každú úlohu možno získať 7 bodov