



Language: Russian

Day: 2

Воскресенье, 14 апреля, 2024

Задача 4. Для последовательности $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, состоящей из n целых чисел, пару чисел (a_i, a_j) , где $1 \leq i < j \leq n$, назовём *интересной*, если существует пара чисел (a_k, a_ℓ) , где $1 \leq k < \ell \leq n$, такая, что

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Для каждого $n \geq 3$ найдите наибольшее возможное число интересных пар в последовательности длины n .

Задача 5. Обозначим через \mathbb{N} множество всех натуральных чисел. Найдите все функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такие, что для каждой пары натуральных чисел (x, y) выполнены следующие два условия:

- (i) x и $f(x)$ имеют одинаковое количество натуральных делителей;
- (ii) Если x не делит y , а также y не делит x , то

$$\text{НОД}(f(x), f(y)) > f(\text{НОД}(x, y)).$$

Здесь $\text{НОД}(m, n)$ обозначает наибольшее натуральное число, которое делит числа m и n .

Задача 6. Найдите все натуральные числа d , для которых найдется многочлен P степени d с действительными коэффициентами такой, что среди чисел $P(0), P(1), P(2), \dots, P(d^2 - d)$ имеется не более d различных значений.