



Language: Romanian

Day: 2

Duminică, 14 aprilie 2024

Problema 4. Pentru o secvență $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ de numere întregi, o pereche (a_i, a_j) , cu $1 \leq i < j \leq n$, se va numi *interesantă* dacă există o pereche (a_k, a_ℓ) de numere întregi, cu $1 \leq k < \ell \leq n$, astfel încât

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Pentru fiecare număr întreg $n \geq 3$, determinați numărul maxim posibil de perechi interesante dintr-o secvență de lungime n .

Problema 5. Fie \mathbb{N}^* mulțimea numerelor naturale nenule. Determinați toate funcțiile $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ astfel încât următoarele condiții să fie îndeplinite pentru orice pereche (x, y) de numere naturale nenule:

- (i) x și $f(x)$ au același număr de divizori pozitivi.
- (ii) Dacă x nu divide y și y nu divide x , atunci

$$\text{c.m.m.d.c.}(f(x), f(y)) > f(\text{c.m.m.d.c.}(x, y)).$$

Notația c.m.m.d.c.}(m, n) desemnează cel mai mare număr întreg care îl divide atât pe m , cât și pe n .

Problema 6. Determinați toate numerele naturale nenule d pentru care există un polinom P de gradul d , cu coeficienți reali, astfel încât printre numerele $P(0), P(1), P(2), \dots, P(d^2 - d)$ să existe cel mult d valori diferite.