2024 GEORGIA
EUROPEAN GIRLS' MATHEMATICAL OLYMPIAD

Language: **Portuguese**

Day: **2**

Domingo, 14 de abril de 2024

Problema 4. Para uma sequência $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ de inteiros, um par (a_i, a_j) com $1 \leq i < j \leq n$ é chamado *legal* se existe um par (a_k, a_ℓ) de inteiros com $1 \leq k < \ell \leq n$ tal que

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Para cada $n \geq 3$, encontre o maior número possível de pares legais presentes em uma sequência de tamanho n.

Problema 5. Seja $\mathbb{N}_{>0}$ o conjunto dos inteiros positivos. Encontre todas as funções $f\colon \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{N}_{>0}$ tais que para todos os pares de inteiros positivos (x, y) valem as seguintes condições:

(i) x e $f(x)$ possuem o mesmo número de divisores positivos.

(ii) Se x não divide y e y não divide x, então

$$\operatorname{mdc}(f(x), f(y)) > f(\operatorname{mdc}(x, y)).$$

Nota: mdc(m, n) é o maior inteiro positivo que divide m e n.

Problema 6. Encontre todos os inteiros positivos d para o qual existe um polinômio P de grau d com coeficientes reais tal que $P(0), P(1), P(2), \ldots, P(d^2 - d)$ assumem no máximo d valores distintos.

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos