



Language: Polish

Day: 2

Niedziela, 14 kwietnia 2024

Zadanie 4. Dla ciągu liczb całkowitych $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, parę (a_i, a_j) spełniającą $1 \leq i < j \leq n$ nazwiemy *ciekawą*, jeśli istnieje para liczb całkowitych (a_k, a_ℓ) , gdzie $1 \leq k < \ell \leq n$ oraz

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 3$, wyznaczyć największą możliwą liczbę ciekawych par w ciągu długości n .

Zadanie 5. Niech \mathbb{N} oznacza zbiór dodatnich liczb całkowitych. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takie, że następujące warunki są spełnione dla wszystkich par liczb całkowitych dodatnich (x, y) :

- (i) x oraz $f(x)$ mają tę samą liczbę dodatnich dzielników.
- (ii) Jeśli x nie dzieli y oraz y nie dzieli x , wówczas

$$\text{NWD}(f(x), f(y)) > f(\text{NWD}(x, y)).$$

Tutaj $\text{NWD}(m, n)$ oznacza największą dodatnią liczbę całkowitą, która dzieli zarówno m jak i n .

Zadanie 6. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite d , dla których istnieje wielomian P stopnia d o współczynnikach rzeczywistych, taki że pośród $P(0), P(1), P(2), \dots, P(d^2 - d)$ jest co najwyżej d różnych wartości.