2024 GEORGIA
EUROPEAN GIRLS' MATHEMATICAL OLYMPIAD

Language: **Norwegian**

Day: 2

Søndag 14. april 2024

Oppgave 4. La $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ være en følge av heltall. Et par (a_i, a_j), der $1 \leq i < j \leq n$, kalles *interessant* dersom det finnes et par (a_k, a_ℓ) av heltall der $1 \leq k < \ell \leq n$ slik at

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

For hver $n \geq 3$, finn det største mulige antallet interessante par i en følge av lengde n.

Oppgave 5. La $\mathbb{N}$ betegne mengden av positive heltall. Finn alle funksjoner $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ slik at følgende er sant for hvert par av positive heltall (x, y):

(i) x og $f(x)$ har samme antall positive divisorer.

(ii) Dersom x ikke deler y og y ikke deler x, så er

$$\gcd(f(x), f(y)) > f(\gcd(x, y)).$$

Her er $\gcd(m, n)$ *det største positive heltallet som deler både* m *og* n.

Oppgave 6. Finn alle positive heltall d som oppfyller at det finnes et polynom P av grad d med reelle koeffisienter der det er høyst d forskjellige verdier blant tallene $P(0), P(1), P(2), \ldots, P(d^2 - d)$.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng