



Language: Macedonian

Day: 2

Недела, 14 април, 2024

Задача 4. За низа од цели броеви $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, парот (a_i, a_j) со индекси $1 \leq i < j \leq n$ се нарекува *интересен*, ако постои пар цели броеви (a_k, a_ℓ) со индекси $1 \leq k < \ell \leq n$, така што

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

За секој $n \geq 3$, одреди го најголемиот можен број интересни парови, во низа од цели броеви со должина n .

Задача 5. Со \mathbb{N} е означено множеството природни броеви. Одреди ги сите функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такви што следните два услови важат за секој пар природни броеви (x, y) :

- (i) Броевите x и $f(x)$ имаат еднаков број на позитивни делители.
- (ii) Ако x не е делител на y и y не е делител на x , тогаш

$$\gcd(f(x), f(y)) > f(\gcd(x, y)).$$

Со $\gcd(m, n)$ е означен најголемиот заеднички делител на броевите m и n .

Задача 6. Одреди ги сите природни броеви d за кои постои полином P од степен d , со коефициенти реални броеви, таков што меѓу вредностите $P(0), P(1), P(2), \dots, P(d^2 - d)$ најмногу d од нив се различни.